

GTD 应用中任意凸曲面表面爬行波射线寻迹

李伟明,吕晓德,高本庆,刘瑞祥

(北京理工大学电子工程系,北京 100081)

摘 要: 射线寻迹是几何绕射理论(GTD)解决高频电磁散射和辐射问题的关键步骤.本文通过引入动态规划的数学优化方法,得到了任意凸曲面表面绕射射线的一般寻迹规划模型.并对无限长圆柱、旋转抛物面和任意构造的一凸曲面上爬行射线进行了寻迹计算,结果表明模型方法是正确的.该方法还可以应用到非均匀媒质任意凸曲面的爬行射线寻迹.

关键词: 射线寻迹; 动态规划; 几何绕射; 离散; 凸曲面

中图分类号: TN820.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2000)09-0049-03

Ray Path Tracing on Convex Surface with Applications to the Geometrical Theory of Diffraction

LI Wei-ming, LÜ Xiao-de, GAO Ben-qing, LIU Rui-xiang

(Dept. of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Ray path tracing is a key step to apply geometrical theory of diffraction in solving the problems of high-frequency electromagnetic scattering and radiating. The paper introduces a dynamic programming method and gives the algorithm model for ray tracing on any convex surfaces. The algorithm model is tested by tracing the ray path on infinite cylinder. The method can be applied to trace the ray path on arbitrary convex surface with inhomogeneous media.

Key words: ray path tracing; dynamic programming; geometrical theory of diffraction; discretization; convex surface

1 引言

几何绕射理论(GTD)是分析飞行器上^[1-3]天线特性的一种行之有效的工程方法.用这种方法计算飞行器上天线的辐射场时,分为计算曲面上的爬行波绕射场和曲边缘的边缘绕射场,这两部分场值的计算首先确定绕射线的轨迹和绕射点的位置,即进行射线寻迹.所谓射线寻迹,根据广义费马原理^[4],就是指能使源点处产生的场经爬行和绕射到场点的光程取极值的路径.在均匀媒质中,射线即为几何长度取极值的曲线.曲边缘的绕射线寻迹问题,对任何几何曲边都可一致地以绕射线位于一个半顶角等于入射线与边缘切线的夹角的圆锥面上的条件来搜寻;曲面上绕射射线寻迹得到较好解决的只有具可展特性的柱面和锥面,其他曲面绕射线的寻迹,现有方法是利用微分几何原理^[5,6],通过求解二阶微分曲线方程,得到一般曲线方程,此求解过程非常困难,在大多情况下无法求得微分方程的解析解,且现有文献^[5,6]给出的射线寻迹关系式,不适用于垂直轴向平面上的两点间的射线寻迹.另外,现有射线寻迹方法都只针对均匀媒质,对于非均匀媒质曲面射线寻迹都未涉及.本文基于动态规划的数学优化方法,将

射线爬行视为一个离散过程.建立了搜寻射线轨迹的数学优化模型,实现了在各种凸曲面上都可一致地以这种模型方法进行爬行波射线寻迹.最后对圆柱、旋转抛物面和任意构造的一凸曲面上的射线进行了寻迹计算,所得结果与已有方法比较,吻合较好.

2 基本原理

动态规划^[7]是应用数学的一个分支,大约产生于50年代,由理查德·贝尔曼(Richard Bellman)所建立.它的成功之处是可以把一个 n 维问题变换为一系列互相联系的单阶段问题,然后逐个加以解决.动态规划能够确定出绝对(全局)极大或极小,而不是相对(局部)极值^[8].射线寻迹也是一个极值求解问题,因此启发我们将动态规划引入射线寻迹,解决目前仍困扰GTD应用的一些问题.

以在曲面 S 上源点 A 到场点 E 的射线寻迹为例,不失一般性可以把 A 到 E 的射线离散为 A 到 B 、从 B 到 C 、从 C 到 D 和从 D 到 E 四个阶段的过程(如图1),通常需上百个阶段,这里取四是为了简单说明.射线寻迹则可转为求经过四个阶段

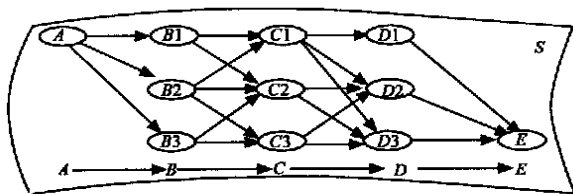


图1 曲面上射线爬行过程离散

的最短路径。求解这个问题并不困难,在图上把 A 到 E 的所有线路(共计 16 条)都找出来,分别计算出他们的长度,经过比较,可以得出。这种方法称为穷举法。对于不太复杂的问题,穷举法是可以的。但是寻迹精度的要求必然使离散的阶段和各阶段上点的数量很大,穷举法将变得非常复杂,其计算量之大,连大型计算机都难以胜任。动态规划是解决上述困难的有效方法之一。其基本思想是从最后一段开始向前逐步递推,求出各点到 E 的极值路线,最后求得由 A 到 E 点的极值路线。即动态规划的方法是逐段向始点方向寻找极值路线的一种方法。

3 数学模型

3.1 定义和变量

建立射线寻迹的动态规划数学模型将涉及许多基本概念和变量,现做一些介绍。

阶段和阶段变量:把所给问题的过程正确地划分为若干个相互联系的阶段,是运用动态规划求解问题的基础。将问题划分阶段后,称描述阶段数的变量为阶段变量,常用 K 表示。阶段的划分,一般是根据时间和空间的自然特征来划分,射线寻迹则主要依据曲面的空间分布和射线大体方向来划分。如图 1 问题被分成了 4 个阶段。

状态和状态变量:在多阶段决策过程中,每个阶段的起始位置或状况称为该阶段的状态。每个阶段的初始状态又是前一阶段的一个终止状态(第一阶段除外)。因而,一旦各个阶段的状态都确定之后,整个过程也就完全确定。描述过程状态的变量称为状态变量。它可以用一个数、一组数或一个向量来描述,常用 S_K 表示 K 阶段的状态变量。如图 1 中第二阶段的状态变量可取值为 $S_2 = \{B1, B2, B3\}$ 。

决策和决策变量:所谓决策,就是从本阶段的状态出发,如何演变到下一阶段状态所作的抉择。描述决策的变量称为决策变量。通常用 X_K 表示第 K 个阶段的决策。决策要依据该阶段状态,所以通常用 $X_K(S_K)$ 表示第 K 阶段处于状态 S_K 时的决策。用 $D_K(S_K)$ 表示第 K 阶段状态是 S_K 时的允许决策集合。所以必须 $X_K(S_K) \in D_K(S_K)$ 。例如在图 1 射线寻迹问题中, $D_1(A) = \{B1, B2, B3\}$, $D_2(B1) = \{C1, C2\}$, 而 $X_1 = B1$ 或 $B2$ 或 $B3$ 都是第 1 阶段的允许决策。

策略和子策略:策略是一个按顺序排列的决策组成的集合。由过程的第 K 阶段开始到终止状态的过程称为问题的子策略。例如 $\{A, B1, C1, D1, E\}$ 就是一个策略; $\{B3, C3, D2, E\}$ 就是从状态 $B3$ 出发的子策略。

状态转移函数:状态转移函数是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。若给定第 K 阶段状态变量 S_K 的值,

如果该段的决策变量 X_K 一经确定,第 $K+1$ 阶段的状态变量 S_{K+1} 的值也就完全确定。即 S_{K+1} 的值随 S_K 和 X_K 的值变化。这种确定的对应关系,记为 $S_{K+1} = T_K(S_K, X_K)$ 。它描述了由 K 阶段到 $K+1$ 阶段的状态转移规律,称为状态转移函数。

阶段损益和策略效益:由阶段 K 的状态 S_K 通过决策 X_K 转移到状态 $K+1$,必须有所收益或支付,即射线要爬行一定的弧长,其损益值用 $D(S_K, X_K)$ 表示,称为阶段损益。例如在前面的问题中 $D(S_K, X_K)$ 表示两点间的距离。对于多阶段决策问题的一个策略 $\{x_1(s_1), x_2(s_2), \dots, x_n(s_n)\}$, 数值

$$F_{1n} = \sum_{i=1}^n D(s_i, x_i) \tag{1}$$

称为策略的指标函数值,它表示了策略的效益。所有的策略中,指标函数值最优的策略,称为最优策略。最优策略的指标函数记为 $f_k(s_k)$ 。

3.2 数学模型建立

如图 2 对于任何曲面 $r(u, v)$, 在曲面上设发射源点坐标 $p_i(u_i, v_i)$, 场点坐标 $p_r(u_r, v_r)$ 。沿 $u = u_1$ 线将区间 $[v_1, v_2]$ 划分成 N 段,过 $N-1$ 个分割点可确定 $N-1$ 条 u 坐标线;同样沿 $v = v_1$ 线将区间 $[u_1, u_2]$ 划分成 M 段,过 $M-1$ 个分割点又可确定 $M-1$ 条 v 坐标线,那么这些 u 线和 v 线族相交,所有交点 p_{ij} 即可离散地表征曲面。显然可设 $M-1$ 条 v 坐标线将射线的爬行过程划分成 M 段,即射线寻迹的求解过程被划分成 M 个阶段,阶段变量 $K=1, 2, 3, \dots, M$ 。

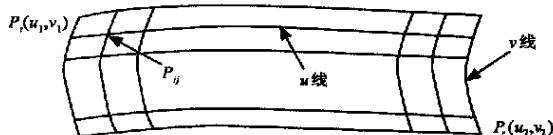


图2 曲面坐标网

第 1 阶段的状态 $S_1 = \{p_i\}$, 第 K 阶段的状态允许取值集合为坐标网交点集 $S_K = \{p_{ij} | u_i, v_j\}$, 其中 $i = K > 1, j = 1, 2, 3, \dots, N$ 。第 K 阶段状态 $s_k = p_{kj}$ 的允许决策集合为 $D_K(p_{kj}) = \{S_{k+1}\}$ 。

根据以上分割和变量定义后,射线寻迹的迭代关系为

$$f_{n+1}(S_{n+1}) = 0$$

$$f_k(s_k) = \min_{x_k \in D_k} \{d(s_k, x_k) + f_{k+1}(S_{k+1})\}$$

其中, $k = n, n-1, \dots, 2, 1$; $d(s_k, x_k) = n_k |s_k x_k|$, n_k 为媒质折射率, $|s_k x_k|$ 为两点间距离。

具体寻迹计算步骤可分为四步: 1. 离散曲面, 确定 p_{ij} 坐标值; 2. 令 $k = n+1$, 则 $f_k(s_k) = 0$; 3. 令 $k = k-1$, 依据式(2)计算 $f_k(s_k)$ 并确定 $x_k, s_k \in \{p_{kj}, j = 1, 2, \dots, m\}$; 4. 重复第三步, 直到 $k=1$, 计算得 $f_1(s_1)$ 即为所求射线轨迹弧长, 射线经过的坐标点也可反向查出。

4 计算实例

4.1 圆柱上的射线寻迹

设圆柱参数方程为: $r = (a \cos v, a \sin v, u)$ (3)
依圆柱可展性质, 源点 p_i 到场点 p_r 的射线轨迹为圆柱螺

线,射线弧长计算公式为:

$$s = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + ((v_2 - v_1) a)^2} \quad (4)$$

不失一般性,现只考虑均匀媒质,令 $n_k = 1$,对于非均匀媒质曲面则需确定各位置点的 n_k 值,应用上面建立的数学模型进行射线寻迹的结果和解析式(3)的计算值见表 1.

表 1 $a = 2.4$

$P_t(u_1, v_1)$	$P_r(u_2, v_2)$	$m = n$	S (解析计算)	S (动态规划)	误差(%)
(1.0, 0.0)	(1.0, 3.1415)	300	7.539822	7.539782	0.0005
(1.0, 0.0)	(4.0, 2.0943)	300	5.853733	5.856082	0.0401
(1.0, 0.0)	(1.0, 3.1415)	400	7.539822	7.539814	0.0001
(1.0, 0.0)	(6.0, 2.9670)	400	8.701025	8.704239	0.0369

以上结果表明,动态规划方法寻迹与解析计算值能很好地吻合,且随着离散网格划分的细密度越高,计算值的精度越高.但为了节约计算资源,往往取网格划分宽度不大于 $1.5 \times 10^{-2}m$ 就能满足工程精度要求.应用此方法占用的计算资源不多,如表 1 中第一条射线的寻迹,在配置 CPU 为 P166MHz,内存 64M 的计算机上,所需计算时间是 2.5 分钟.

4.2 旋转抛物面上射线寻迹

设抛物面的参数方程为: $r(u \cos v, u \sin v, u^2)$ (5)

旋转抛物面上射线寻迹难以求得解析解,应用动态规划模型求解,结果见表 2.由于无解析解,没有给出相对误差,只给出过 p_t 和 p_r 且垂直于 z 轴的平面截抛物面所得圆弧上,连接 p_t, p_r 的弧长.以便于对抛物面上的射线爬行方向有一个基本概念.

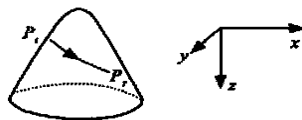


图 3 旋转抛物面

表 2 $a = 1.6$

$P_t(u_1, v_1)$	$P_r(u_2, v_2)$	$m = n$	S^*	S (动态规划)
(2.0, 0.0)	(2.0, 3.141593)	300	10.0531	9.41626
(2.0, 0.0)	(2.0, 3.141593)	400	10.0531	9.41621
(2.0, 0.0)	(3.0, 3.141593)	400	无	14.3241
(2.0, 0.0)	(3.0, 3.141593)	600	无	14.3313

*过 p_t 和 p_r 且垂直于 z 轴的平面截抛物面所得圆弧上,连接 p_t, p_r 的弧长.

4.3 非典型曲面上射线寻迹

为便于构造一凸曲面,这里以平面曲线 $y = 6 \sin(x/11)$, $0 \leq x \leq 11$ 绕 x 轴旋转,所得曲面方程为:

$$r(u, 6 \sin(u/11) \sin v, 6 \sin(u/11) \cos v) \quad (6)$$

曲面是非可展曲面,因此曲面上的射线寻迹难以推导出解析解,现有文献也都未涉及.应用动态规划模型方法,经离散曲面后,迭代求解结果见表 3.

表 3

$P_t(u_1, v_1)$	$P_r(u_2, v_2)$	$m = n$	S^*	S (动态规划)
(2.3, 0.0)	(2.3, 3.141593)	500	11.5104	11.3214
(2.3, 0.0)	(2.3, 3.141593)	600	11.5104	11.3221
(1.3, 0.0)	(2.3, 2.094395)	300	无	5.5612
(1.3, 0.0)	(3.3, 2.094395)	300	无	7.1105

*过 p_t 和 p_r 且垂直于 x 轴的平面截曲面所得圆弧上,连接 p_t, p_r 的

弧长.

实际应用中,任意物体表面不能都只用一个曲面方程来精确描述,但将其分成几个部分,分别加以方程描述是可行的.对于这种情况同样能用动态规划方法进行射线寻迹,只是曲面离散化的过程也须各部分分别进行.

5 结论

本文将建立的动态规划模型应用于园柱面射线寻迹计算.结果与解析计算值比较,动态规划模型寻迹方法能达到较高的精度要求,同时还应用于非可展面旋转抛物面和构造的一凸曲面上射线寻迹.应用此模型能大大减少求射线解析解的数学推导过程且易于推广到其他的凸曲面.在非均匀媒质表面方法也有效,只须将曲面上各点的折射率代入计算公式便可得相应结果.因此,动态规划方法的引入,为 GID 应用中射线寻迹提供了新的解决问题途径.

参考文献:

- [1] C.L. YU, W.D. Burnside. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1978, 26(5): 636 - 641.
- [2] Walter D. Burnside, Melvin C. Gireath, Ronald J. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1975, 23(3): 309 - 316.
- [3] Walter D. burnside, Ronald J. Marhefka, Chong L. YU. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1973, 21(6): 780 - 786.
- [4] 汪茂光. 几何绕射理论 [M]. 西安:西北电讯工程学院出版社, 1985: 6 - 9.
- [5] R. M. Jha, D. J. Edwards, R. Bhakthavathsalam. Electronics Letters, 1992, 28(4): 367 - 369.
- [6] R. M. Jha, D. J. Edwards, V. Sudhakar. Electronics Letters, 1992, 28(9): 701 - 702.
- [7] 钱颂迪. 运筹学 [M]. 北京:清华大学出版社, 1990: 194 - 205.
- [8] 张有为. 动态规划 [M]. 长沙:湖南科学技术出版社, 1991: 57 - 78.

作者简介:



李伟明 1967 年出生,现为北京理工大学电子工程系在读博士.研究领域:电磁场数值算法、天线理论和应用、电磁兼容、雷达散射及隐身技术.



吕晓德 1969 年出生,1997 年于西安交通大学获工学博士学位,现为北京理工大学博士后.感兴趣的研究领域:电磁场数值算法、天线理论和应用、高频算法及电磁兼容.